40 狄利克雷定理

數學家狄利克雷利用簡單的鴿籠原理證明了有名的狄利克雷定理：

定理 40.1(狄利克雷定理)　如果α是實數，N 是一個正整數，則可以找到正整數 $n\,(1\le n\le N)$ 及整數 m 滿足

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{nN}.$$

【證明】考慮下列 N 個實數

$$0\le n\alpha-[n\alpha]<1,\ n=1,2,3,\cdots,N.$$

由於此 N 個數落在

$$[0,\frac{1}{N}),[\frac{1}{N},\frac{2}{N}),[\frac{2}{N},\frac{3}{N}),\cdots,[\frac{(N-1)}{N},1)$$

N 個區間內，所以有底下兩種情形：

(1) 每一個區間恰含一個數，因此可以找到正整數 $n(1\le n\le N)$ 滿足

$$0\le n\alpha-[n\alpha]<\frac{1}{N}\Rightarrow\left|\alpha-\frac{[n\alpha]}{n}\right|<\frac{1}{nN}.$$

(2) 有一個區間含兩個數以上：設正整數 $1\le n_1<n_2\le N$ 滿足

$$\begin{cases}\dfrac{i}{N}\le n_1\alpha-[n_1\alpha]<\dfrac{i+1}{N}\\[2mm] \dfrac{i}{N}\le n_2\alpha-[n_2\alpha]<\dfrac{i+1}{N}\end{cases}\Rightarrow\ 0\le\left|(n_2-n_1)\alpha-([n_2\alpha]-[n_1\alpha])\right|<\frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow\ \left|\alpha-\frac{[n_2\alpha]-[n_1\alpha]}{n_2-n_1}\right|<\frac{1}{(n_2-n_1)N}.$$

得證。

定理 40.2　設實數α不是有理數。證明：可以找到無窮多個分數$\dfrac{m}{n}$（其中 n 為正整數，

m為整數）滿足

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{n^2}.$$

【證明】假設僅有d個分數滿足定理所要求，並令此d個分數分別為

$$\frac{m_i}{n_i}, i=1,2,3,\cdots,d.$$

因為α不是有理數，所以$\alpha-\frac{m_i}{n_i}\neq 0$。因此可以取一個滿足

$$\frac{1}{N}<\left|\alpha-\frac{m_i}{n_i}\right|, i=1,2,3,\cdots,d$$

的大整數N。根據狄利克雷定理：可以找到正整數$n\,(n\leq N)$及整數m使得

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{nN}\leq\frac{1}{n^2}.$$

因為

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{nN}\leq\frac{1}{N},$$

所以分數$\frac{m}{n}$不是前面假設的d個分數之一；但這與

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{n^2}$$

矛盾。因此可以找到無窮多個分數$\frac{m}{n}$（其中n為正整數，m為整數）滿足

$$\left|\alpha-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{n^2}.$$

定理 40.3　設正整數s不是完全平方數。證明：可以找到無窮多個整數數對(x,y)滿足

$$|x^2-sy^2|<1+2\sqrt{s}.$$

【證明】由前定理知道：可以找到無窮多個正分數$\dfrac{x}{y}$滿足

$$\left|\sqrt{s}-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{y^2}\Rightarrow\begin{cases}|y\sqrt{s}-x|<\dfrac{1}{y}\\ |y\sqrt{s}+x|\le|-y\sqrt{s}+x|+2y\sqrt{s}<\dfrac{1}{y}+2y\sqrt{s}\end{cases}$$

$$\Rightarrow|x^2-sy^2|<\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y}+2y\sqrt{s}\right)=\frac{1}{y^2}+2\sqrt{s}\le1+2\sqrt{s}.$$

因此可以找到無窮多的正整數數對(x,y)使得

$$|x^2-sy^2|<1+2\sqrt{s}.$$

取$s=3$時，這個定理告訴我們：有無窮多個整數數對(x,y)滿足

$$\left|x^2-3y^2\right|\le4.$$

換句話說：雙曲線$x^2-3y^2=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4$中，至少有一條通過無窮多個整數數對。事實上，在第 37 節中，我們已經證明$s=2$的情形；在第 41 節中，我們將證明更一般的結果。

動手玩數學

觀察等式

$$\begin{aligned}1&=1,\\ 2\cdot1-\frac{1}{2}&=1+\frac{1}{2},\\ 3\cdot1-3\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\\ 4\cdot1-6\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\end{aligned}$$

根據這些等式，是否可以得到比較一般的猜測。

挑戰題

設 p,q 為實數且 $x^3-px+q=0$ 有三實根。

(1) 證明 $p\geq 0$。

(2) 若 α 為 $x^3-px+q=0$ 的一根，則證明

$$|\alpha|\leq 2\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

費馬質數問題

我們都知道第 n 個費馬數 F_n 定義為正整數

$$F_n=2^{2^n}+1.$$

是否存在無窮多個費馬質數（即既是費馬數也是質數）一直是很困難的問題。費馬質數之所以重要的原因是因為：利用代數學上的伽羅瓦理論，數學家可以證明："正質數 P 邊形可以尺規作圖的充要條件是 P 是一個費馬質數"。由此結果，我們知道：正

$$F_0=3,F_1=5,F_2=17,F_3=257,F_4=65537$$

邊形等是可以尺規作圖的；而正 7, 11, 13 邊形是不能以尺規作圖的（因為它們不是費馬質數）。